ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1975

1e INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

NOTA — *Les sept questions sont totalement indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre arbitraire, sous réserve d'indiquer très lisiblement leur numéro.*

I — Soient les équations différentielles :

(1) $x^2\,y'' + xy' - (x^2 + x + 1)\,y = 0$

(2) $z'' + 3z' + 2z = 0$

Intégrer l'équation (1), sachant qu'elle admet une solution non nulle y_1 telle que xy_1 soit solution de l'équation (2).

II — Diagonaliser la matrice

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{3} & -3 & i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} & 1 & i\sqrt{3} & -3 \\ -3 & i\sqrt{3} & 1 & i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} & -3 & i\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n, n étant un entier naturel non nul.

III — Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in [\,0,\,1\,] \qquad f_n(x) = n\,x^n \sin \pi x$$

1° — Étudier les variations de f_n. On notera α_n l'abscisse du maximum de la fonction.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(\alpha_n)$.

2° — a) On pose $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$

La convergence de la suite (f_n) est-elle uniforme ?

b) On pose $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

La convergence de la série (f_n) est-elle uniforme ?

IV – Construire la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = \text{Arc cos (cost)} + \text{Arc cos (cos2t)} \\ y = \text{Arc sin (sint)} + \text{Arc sin (sin2t)} \end{cases}$$

V – Soit E un espace vectoriel réel. A tout endomorphisme g de E on associe l'endomorphisme φ_g de $\mathcal{L}$ (E) défini par : $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi_g(f) = g \circ f - f \circ g$

1° Dans cette question E est un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit g l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{v}$ de E, $\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, associe le vecteur $g(\vec{v}) = 2x\,\vec{j} + y\,\vec{k}$:

a) - Montrer que φ_g est nilpotent

b) - Déterminer le noyau de φ_g

2° E étant quelconque, on suppose que g est nilpotent.

a) - Montrer que φ_g est nilpotent ; que $\mathcal{E} - \varphi_g$ est inversible ($\mathcal{E}$ application identique de $\mathcal{L}$ (E) dans lui-même)

b) - Déterminer $(\mathcal{E} - \varphi_g)^{-1}$ ainsi que les valeurs propres et les vecteurs propres de $\epsilon - \varphi_g$.

VI – Soit E un espace vectoriel réel de dimension quatre, rapporté à une base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. On considère la forme quadratique Φ, définie sur E, qui à tout vecteur $\vec{v} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3 + t\,\vec{e}_4$ associe le réel : $\Phi(\vec{v}) = x^2 + y^2 - 2xz - 2yt + 2zt$

Déterminer :
- les vecteurs isotropes de Φ
- le noyau de Φ
- une base B' de vecteurs deux à deux conjugués par rapport à Φ

Préciser les matrices de Φ dans la base B et dans la base B'.

VII – Étude et représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = x \left| \frac{x+1}{x} \right|^{x+1}$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail